

На правах рукописи
УДК 532.516.5; 532.542.4

СТУДЕНОК Сергей Игоревич

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Специальность 01.04.14 – Теплофизика и теоретическая
теплотехника

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Екатеринбург – 2004

Работа выполнена на кафедре общей и молекулярной физики физического факультета Уральского государственного университета им. А. М. Горького

Научный руководитель – кандидат физико–математических наук,
профессор
Г. П. Быстрой

Официальные оппоненты – доктор физико–математических наук,
профессор
А. Ю. Зубарев

кандидат физико–математических наук,
профессор
Л. Д. Сон

Ведущее учреждение – Пермский государственный университет
(г. Пермь)

Защита состоится «23» декабря 2004г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.01 в Уральском государственном университете им. А. М. Горького (620083, г. Екатеринбург, К-83, пр. Ленина, 51, комн. 248)

С диссертационной работой можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А. М. Горького.

Автореферат разослан « » 2004г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико–математических наук
старший научный сотрудник

Н. В. Кудреватых

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Большинство атмосферных явлений, таких как образование облаков, больших атмосферных вихрей (торнадо), движение аэрозольных частиц над большими городами тесно связаны с турбулентными пульсациями гидродинамических и теплофизических характеристик: скорости, давления, температуры и др. Это следует уже из того, что уравнения Рейнольдса [1], описывающие осредненные турбулентные потоки, содержат квадратичные моменты по пульсациям скорости (тензор турбулентных напряжений). Эти уравнения не могут быть разрешены без введения дополнительных эмпирических соотношений (проблема замыкания) [2]. Тем не менее, существует надежда, что для некоторых частных случаев турбулентных течений эта проблема может быть решена. И, прежде всего, это касается изотропной турбулентности как наиболее простого типа турбулентного движения, которым характеризуется микроструктура подавляющего большинства реальных, неізотропных турбулентных потоков (локальная изотропность) [3].

Таким образом, построение математических моделей, описывающих временную и пространственную динамику флуктуаций (пульсаций) теплофизических и гидродинамических параметров изотропной турбулентности является на сегодняшний день одной из актуальных проблем теплофизики и теоретической физики.

Цель работы. Целью работы являлось построение детерминированной математической модели изотропных турбулентных пульсаций теплофизических и гидродинамических параметров развитой турбулентности, учитывающей вязкоупругие свойства и последствие турбулентной среды.

Согласно общей цели основными задачами настоящего исследования являются:

1. Построение системы уравнений движения вязкоупругой среды на основе уравнений Навье–Стокса и уравнения Максвелла.
2. Нахождение в рамках полученной системы уравнений одномерного нелинейного дифференциального уравнения (НДУ) для изотропных турбулентных пульсаций скорости в инерционном интервале вязкоупругой среды с запаздыванием; выражений для изотропных турбулентных пульсаций температуры, пространственного масштаба, плотности, скорости турбулентной диссипации энергии и компонент тензора внутренних напряжений.
3. Осуществление перехода от НДУ интегрированием к одномерному отображению, как одному из методов исследования в рамках нелинейной динамики.
4. Проведение численных расчетов одномерных моделей. Исследование свойств полученных хаотических решений для динамики турбулентных пульсаций гидродинамических и теплофизических параметров, сравнение результатов с экспериментальными данными.

Научная новизна и защищаемые положения.

1. Обоснован и предложен новый подход к рассмотрению развитых турбулентных потоков с позиций вязкоупругих сред и получен критерий применимости такого подхода. Сделано обобщение уравнений Навье–Стокса на случай движения вязкоупругих сред и найдена соответствующая система дифференциальных уравнений второго порядка со временем релаксации внутренних напряжений.

2. В рамках системы уравнений движения вязкоупругой среды предложены две математические модели, описывающие хаотические пульсации скорости в инерционном интервале изотропной турбулентной вязкоупругой среды с запаздыванием при больших числах Рейнольдса. Описано возникновение жесткой турбулентности, перемежаемости и гистерезиса.

Первая модель представляет собой одномерное НДУ второго порядка с переменным коэффициентом затухания в условиях периодического изменения осредненного градиента давления. Вторая модель в виде одномерного отображения получается интегрированием одномерного НДУ на конечном временном интервале в предположении, что: а)

возникновение (распад) турбулентных вихрей в рассматриваемом турбулентном потоке является периодическим во времени процессом, происходящим за времена, много меньшие самого периода; б) время релаксации напряжений в турбулентной среде много меньше времени ретардации (времени запаздывания); в) осредненный градиент давления равен нулю.

Обе модели включают также выражения для изотропных турбулентных пульсаций температуры, пространственного масштаба, плотности, скорости турбулентной диссипации энергии и компонент тензора внутренних напряжений. Для первой модели разработаны алгоритмы расчета, а для второй модели предложены выражения, позволяющие рассчитать показатели Ляпунова, энтропию Колмогорова и время забывания начальных условий.

3. В рамках первой модели показано удовлетворительное количественное соответствие экспериментальным данным следующих теоретически полученных величин: а) периодов турбулентных пульсаций скорости; б) коэффициента турбулентной диффузии; в) корреляционной функции поперечных пульсаций скорости; г) коэффициентов моментов сопротивления, моментов силы сопротивления свободно вращающегося диска и диска в кожухе; д) спектров мощности турбулентных пульсаций скорости и температуры. Для обеих моделей показывается, что изначально близкие фазовые траектории различных пульсационных характеристик экспоненциально расходятся за характерное время, что свидетельствует о забывании рассматриваемой системой начальных условий и о необратимости описываемых процессов в турбулентности.

Рассчитываются также корреляционная размерность диссипативного (странного) аттрактора, спектры пульсаций плотности и масштаба пространственных пульсаций. Для одномерного НДУ разработаны алгоритмы построения бифуркационных диаграмм в зависимости от числа Рейнольдса и других управляющих параметров, что существенно расширяет метод нейтральных кривых применительно к развитому турбулентному течению.

4. Впервые для одномерной задачи предложена и теоретически обоснована нелинейная модель для мгновенной скорости турбулентной диссипации энергии в виде полинома четвертой степени по пульсациям скорости в инерционном интервале. Использование этой модели для развитой турбулентности позволяет обосновать теоретически законы Колмогорова–Обухова «одной трети» и «пяти третей», а также соотношения для интервала сильной диссипации, найденные ранее из соображений размерности. Теория позволила, в том числе, определить константы в этих законах и соотношениях.

5. Установлено, что переход к развитой изотропной турбулентности в соответствии с предлагаемыми одномерными моделями происходит по сценарию Фейгенбаума посредством удвоения периода.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенная в диссертационной работе система уравнений движения вязкоупругой среды может быть использована для расчета макроскопических (осредненных) параметров развитых изотропных турбулентных течений, для которых существенными являются их вязкоупругие свойства, а применимость уравнений Навье–Стокса в силу этого является ограниченной. Вытекающие из этой системы уравнений одномерные пульсационные модели движения вязкоупругой среды, а также другие выражения могут быть применены к расчету изотропных турбулентных пульсаций скорости, плотности, температуры, пространственного масштаба, величины скорости турбулентной диссипации энергии и компонент тензора внутренних напряжений.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, были доложены на 7-й Всероссийской научной конференции студентов–физиков в г. Санкт–Петербурге (2001), Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» в г. Самара (2002), на 12-й межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» в г. Самара (2002), на 13-й Зимней школе по механике сплошных сред в Перми (2003), на Международной школе–семинаре «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» в г. Москва (2004), на кафедре общей и

молекулярной физики Уральского государственного университета (2004), на кафедре теоретической физики Пермского государственного университета (2004).

Публикации. По теме диссертации у автора имеется семнадцать публикаций: 3 статьи в реферируемых журналах, 6 статей в сборниках и трудах конференций и 7 тезисов докладов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и одного приложения. Каждая глава имеет заключение и разбита на параграфы. Объем диссертации составляет 141 страницу, включая 42 рисунка, 2 таблицы и список литературы, содержащий 104 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность темы диссертации, ставятся цель и задачи работы. Формулируются положения, выносимые на защиту, показывается научная и практическая их значимость.

В первой главе развиваются идеи А. Обухова по применению вязкоупругого подхода к развитым турбулентным потокам жидкости (воды) [4, 5]. Связано это с тем, что при больших числах Рейнольдса периоды мелкомасштабных турбулентных пульсаций жидкости t' становятся сравнимы по порядку величины с временем релаксации внутренних напряжений τ_r , например, в воде: $t' \sim \tau_r \sim 10^{-5}$ с. Найден критерий применимости вязкоупругого подхода к развитым турбулентным потокам, который выражается соотношением: $\tau_r \sim \theta / Re^{1/2}$, где θ – период крупномасштабных пульсаций, Re – число Рейнольдса.

Произведено обобщение классического уравнения Максвелла [6] для тензора внутренних напряжений σ_{ik} вязкоупругой среды на случай напряжения сжатия, что выражается в появлении дополнительных членов с $\partial u_{ll} / \partial t$:

$$\sigma_{ik} + \tau_r \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = 2\varepsilon \tau_r \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} + \left(\nu - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \tau_r \delta_{ik} \frac{\partial u_{ll}}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь ν – модуль всестороннего сжатия, ε – модуль сдвига, t – время, u_{ik} – тензор деформации, δ_{ik} – дельта-символ Кронекера. Показывается, что для периодического движения, когда u_{ik} и σ_{ik} зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$ (ω – частота воздействия внешней силы), при $\omega \tau_r \gg 1$ уравнение (1) дает выражение для тензора напряжений, а при $\omega \tau_r \ll 1$ переходит в выражение для тензора вязких напряжений. Совместное рассмотрение уравнения (1) и уравнений Навье–Стокса позволило обобщить последние на случай движения вязкоупругих сред:

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} \right) + \mathcal{F} \left(V_k \frac{\partial V_i}{\partial z_k} \right) = \mathcal{F}(f_i) - \mathcal{F} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z_i} \right) + \mathcal{F} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial z_k} \right), \quad \mathcal{F} = 1 + \frac{\tau_r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2)$$

Здесь \mathcal{F} – оператор, V_i – “ i ”-я компонента мгновенной скорости течения жидкости в данной точке потока; z_i – пространственная координата вдоль оси “ i ”; ρ – мгновенная плотность жидкости; P – мгновенное давление; $i, k = x, y, z$. Тензор внутренних напряжений σ_{ik} в (2) удовлетворяет уравнению (1). Полученные уравнения движения вязкоупругих сред (2) отличаются от уравнений Навье–Стокса, во-первых, тем, что являются уравнениями второго порядка [7], во-вторых, содержат время релаксации внутренних напряжений в жидкости. Аналогично уравнению (1) для уравнений (2) показано, что в двух предельных случаях высокочастотных ($\omega \tau_r \gg 1$) и низкочастотных ($\omega \tau_r \ll 1$) пульсаций скорости они переходят в первом случае в уравнения движения сплошной среды с тензором напряжений, а во втором – в классические уравнения Навье–Стокса.

Уравнения (2) применяются к описанию развитых изотропных турбулентных потоков, для которых $0.01 < \omega \tau_r < 1$. Путем разделения скорости, давления, плотности в системе (2) на осредненные и пульсационные составляющие и последующего осреднения по правилам

Рейнольдса [1], [8] была найдена система уравнений для осредненного движения вязкоупругой среды. Далее путем вычитания из (2) уравнений для осредненного движения была получена система уравнений для пульсаций скорости вязкоупругой сжимаемой жидкости. Показывается, что в случае несжимаемой среды и при $\tau_r=0$ система уравнений осредненного движения переходит в уравнения Рейнольдса [1], а уравнения для пульсационного движения – в пульсационные уравнения, получаемые в цепочке уравнений Фридмана-Келлера [2].

Для упрощения пульсационной системы уравнений были введены ряд предположений. Во-первых, полагалось, что сумма осредненных слагаемых, стоящих в левой части этих уравнений, равна сумме осредненных слагаемых в их правых частях. Во-вторых, поскольку жидкость является слабо сжимаемой средой, полагалось, что относительные пульсации плотности много меньше единицы. В-третьих, для простоты рассматривался прямолинейно движущийся вдоль оси Ox изотропный турбулентный поток жидкости, осредненное движение которого несжимаемо ($\partial \bar{V}_i / \partial z_i = 0$, черта сверху означает осреднение по времени). В-четвертых, члены, содержащие вторую вязкость, предполагались малыми и исключались из уравнений. В-пятых, полагалось, что на рассматриваемое течение не действуют никакие массовые силы ($f_i=0$). Известно также, что в изотропном турбулентном потоке отсутствуют осредненные напряжения сдвига ($\partial \bar{V}_i / \partial z_k = 0$) и градиент пульсаций давления ($\partial p' / \partial z_i = 0$). В результате была получена замкнутая система 4-х пульсационных уравнений для развитого изотропного турбулентного движения вязкоупругой жидкости:

$$\tau_r \frac{\partial^2 V_i'}{\partial t^2} + \frac{\partial V_i'}{\partial t} + \mathfrak{F}_s \left(V_k' \frac{\partial V_i'}{\partial z_k} \right) = \mathfrak{F}_s \left(\frac{\rho'}{\rho \rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z_i} \right) + \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial z_k} \right), \quad (3)$$

$$\sigma'_{ik} = \mu_0 \left(\frac{\partial V_i'}{\partial z_k} + \frac{\partial V_k'}{\partial z_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_0 \delta_{ik} \frac{\partial V_l'}{\partial z_l}, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + V_i \frac{\partial \rho'}{\partial z_i} + \rho \frac{\partial V_i'}{\partial z_i} = 0, \quad \mathfrak{F}_s = 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь V_i' , ρ' , – пульсации скорости (“i” – я компонента) и плотности; ρ_0 – средняя плотность жидкости; ρ – мгновенная плотность; \bar{P} – осредненное давление; σ'_{ik} – пульсационная составляющая тензора внутренних напряжений; $\mu_0 = \rho_0 \nu$ – осредненное значение динамической вязкости (ν – кинематическая вязкость). Численное решение системы уравнений (3) в настоящее время не представляется возможным, вследствие недостаточной производительности современных компьютеров. Для того чтобы систему уравнений (3) можно было решить численно, вводились дополнительные предположения.

1. Система уравнений (3) сводилась к одномерной задаче путем наложения следующих ограничений на пульсации скорости и плотности:

$$V_k' \left(\partial V_i' / \partial z_k \right) = A \cdot V_x' \left(\partial V_x' / \partial x \right), \quad \partial V_l' / \partial z_l = C \cdot \left(\partial V_x' / \partial x \right), \quad V_i' \left(\partial \rho' / \partial z_i \right) = G \cdot V_x' \left(\partial \rho' / \partial x \right),$$

$$\left(\partial^2 V_i' / \partial z_k^2 \right) + \left(\partial^2 V_k' / \partial z_i^2 \right) = E \cdot \left(\partial^2 V_x' / \partial x^2 \right), \quad \left(\partial V_i' / \partial z_k \right) \left(\partial V_k' / \partial z_i \right) = H \left(\partial V_x' / \partial x \right)^2. \quad (4)$$

Здесь в левых частях выражений (4) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам; V_x' – проекция пульсационной скорости на ось Ox ; A, C, E, G, H – некоторые константы.

2. Воспользовавшись методом И. Пригожина и Р. Тома приведения уравнений к канонической форме для одномерной задачи [9], реализованного в работе [10], была получена теоретически обоснованная нелинейная модель скорости турбулентной диссипации энергии вязкоупругой жидкости E_T в единице массы:

$$E_T = \nu \left(A_1 + A_2 V_x' + A_3 V_x'^2 + A_4 V_x'^3 + A_5 V_x'^4 \right). \quad (5)$$

Здесь A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – коэффициенты полинома, которые в общем случае могут зависеть от координат, осредненной скорости и давления, результирующей массовой силы и степени

возмущенности турбулентного потока. В отличие от подхода Л. Ландау [11], который раскладывал энергию в ряд вблизи критической точки, упомянутый метод не требует малости параметра порядка (V_x') и может быть применен вдали от критической точки. Представление выражения (5) в каноническом виде (в виде потенциала катастрофы сборки [9]) и последующее его сравнение с выражением для величины E_T в уравнении баланса внутренней энергии, позволили получить выражение для градиента пульсаций скорости (см. (6)) и, следовательно, выразить нелинейные члены и лапласианы в уравнениях (3) через значение пульсаций скорости V_x' . Показано, что наиболее вероятное значение V_x' в этом случае соответствует минимуму скорости турбулентной диссипации энергии, что характерно для инерционного интервала движений.

3. Следуя идеям Г. Скремстеда [8] полагалось, что влияние неравномерностей внешнего течения, в том числе образование и распад турбулентных вихрей, выражается в периодической зависимости осредненного градиента давления от координаты вдоль направления движения потока: $\partial \bar{P} / \partial x = \nabla P_0 \sin k_x x \cong \nabla P_0 \sin \omega t$, где $k_x \sim \omega / V_x$ – проекция волнового числа на ось Ox ; ∇P_0 – амплитуда возмущения осредненного градиента давления; ω – частота распада и образования вихрей, она соответствует крупномасштабным пульсациям с периодом $\theta \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ с. и частотой $\omega \sim 10^2 - 10^3$ с $^{-1}$. Предполагается, что развитая турбулентность возникает при больших числах Рейнольдса $Re \sim (10 - 10^2) \cdot Re_c$.

4. Следуя гипотезе Г. Гершуни [12], в модель также вводилась ретардация (запаздывание) – явление релаксации пульсационной скорости за конечное время τ после мгновенного снятия напряжений [13].

В результате сделанных предположений было получено одномерное НДУ второго порядка в приведенном виде для изотропных турбулентных пульсаций скорости в инерционном интервале вязкоупругой жидкости с запаздыванием:

$$\tau_r \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \Gamma(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \psi(t) \left(\frac{\rho^{*/}}{1 + \rho^{*}} \right) \nabla P_0^* \sin \omega^* t - B(\eta^3 + a^* \eta), \quad (6)$$

$$\Gamma(\eta) = 1 - \delta \tau \cdot B(3\eta^2 + a^*), \quad \delta \tau = \tau - \tau_r, \quad B = \sqrt{A^2 / (2H - (2/3)C^2)}, \quad Re \geq Re_c,$$

$$\psi(t) = -\tau \tau_r \omega^{*2} - 1 + (\tau - \tau_r) \omega^* \cdot \text{ctg}(\omega^* t), \quad \partial \eta / \partial x^* = J(\eta^2 + a^*), \quad J = (3 / (6H - 2C^2))^{1/2},$$

$$\rho^{*} = (Re^* / (Re^* + (G + 1)\eta))^{C/G+1} - 1, \quad Re^* = Re / Re_c = \bar{V}_x / V_c, \quad a^* = -\beta^{1/2} (Re^{*2} - 1),$$

$$\beta = \sqrt{V_x'^2 / \bar{V}_x}.$$

Здесь $t \equiv t/t_0$, $\tau \equiv \tau/t_0$, $\tau_r \equiv \tau_r/t_0$ – приведенные время, время запаздывания и время релаксации внутренних напряжений; $t_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ с. – характерный масштаб времени ($t_0 \sim t'$); $\eta = (V_x' / V_c)$ – приведенная величина x -ой компоненты пульсаций скорости; V_c – критическая скорость перехода к турбулентности; β – степень турбулентности; $\rho^{*} = \rho' / \rho_0$ – приведенное значение пульсаций плотности; ρ_0 – осредненная плотность жидкости; $\nabla P_0^* = \nabla P_0 / \rho_0 V_c^2$ – приведенная амплитуда возмущений осредненного градиента давления; $\omega^* = \omega t_0$ – приведенная частота образования и распада вихрей; $Re_c = \xi_c V_c / \nu$ – критическое число Рейнольдса; $Re = \xi_c \bar{V}_x / \nu$ – число Рейнольдса; ξ_c – характерный пространственный масштаб задачи; \bar{V}_x – осредненная скорость основного течения; ν – кинематическая вязкость.

Получены также приведенные выражения для масштаба пространственных пульсаций $\xi^* = \xi / \xi_c$ (ξ – масштаб пространственных пульсаций) (7); пульсаций температуры $T^* = T' / T_0$ (T' – пульсации температуры) (8); пульсаций величины скорости турбулентной диссипации энергии в единице массы $E_T^* = \xi_c E_T / V_c^3$ (9); диагональных (σ_{11}^*) и недиагональных (σ_{12}^*)

компонент тензора внутренних напряжений, а также выражение для корреляционной функции поперечных пульсаций скорости B_{nn} в развитом турбулентном потоке:

$$\xi^* = \xi_0^* \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{a^*} - \eta}{\sqrt{a^*} + \eta} \right|, \quad T^{*/} \cong \sqrt{\frac{\phi^* \xi^*}{\eta}}, \quad E_T^* \cong \frac{1}{Re_c} (\eta^2 + a^*)^2, \quad (7), (8), (9)$$

$$\sigma_{11}^{*/} = \frac{1}{Re_c} \left(E - \frac{2}{3} C \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^*} \right), \quad \sigma_{12}^{*/} = \frac{E}{Re_c} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^*} \right), \quad B_{nn}(r^*) = \left\langle \left(\eta(0, t) - \overline{\eta(0, t)} \right) \left(\eta(r^*, t) - \overline{\eta(r^*, t)} \right) \right\rangle.$$

В последних выражениях $\xi_0^* = \left(2J \sqrt{a^*} \right)^{-1}$, $J = B/A$, $\phi^* = \overline{E_T} t_0 / c_p T_0$, где $\overline{E_T}$ – осредненная величина скорости турбулентной диссипации энергии в единице массы, c_p – теплоемкость жидкости при постоянном давлении; T_0 – осредненное значение температуры рассматриваемого турбулентного течения; $r^* = r/\xi_c$ – приведенная величина расстояния от начала координат до данной точки потока. Угловыми скобками обозначено осреднение по ансамблю реализаций.

Во второй главе приводятся численные расчеты НДУ (6). Показывается, что в широкой области управляющих параметров это уравнение имеет детерминированные хаотические, периодические и перемежающиеся решения, реализующиеся по типу странного аттрактора (рис. 1а, б). Пульсации скорости $\eta^\gamma > 0$ ($\eta^\gamma = \eta/Re^*$) соответствуют пульсациям по ходу течения, пульсации $\eta^\gamma < 0$ – против хода. Промежуток времени рассмотрения выбирался таким образом, чтобы среднее по времени по пульсациям скорости было близко к нулю ($\overline{\eta} \cong 0$), что соответствует условию изотропности пульсаций.

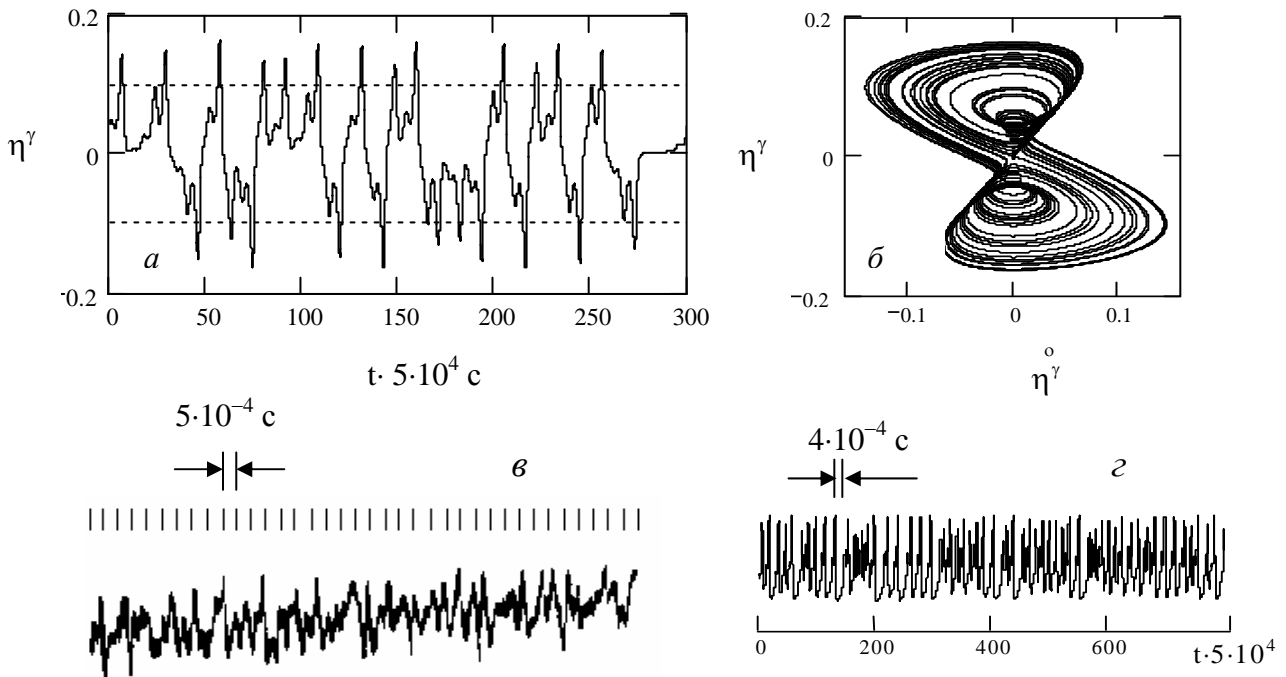


Рис. 1. Детерминированный хаос пульсаций скорости в развитой изотропной турбулентности: а) теоретический расчет по (6) при $A=C=G=3$, $E=6$, $H=9$, $\beta=1.04060401 \cdot 10^{-4}$; $Re^*=7$, $\omega^*=1.109901$, $Re_c=5 \cdot 10^5$, $\nabla P_0^*=0.38$, $a^*=-0.489648$, $\tau=1.52$, $\tau_r=0.88$, $\omega^* \tau_r=0.98$, $\eta^\gamma(0)=0.3$, $\eta^\gamma(0)=0.02$; б) фазовый портрет теоретических пульсаций; в) экспериментальные данные; г) теоретический расчет по (6).

Далее все рисунки, если не указывается особо, строятся для значений управляющих параметров рисунка 1а.

Из рис. 1в, г видно, что характерные периоды пульсаций скорости, полученные в эксперименте и в численных расчетах при заданном масштабе $t_0=2 \cdot 10^{-5}$ с., имеют один и тот же порядок $\sim 10^{-4}$ с., что указывает на адекватность теоретической модели эксперименту. Показывается, что хаотические пульсации в данной постановке испытывают также плотность, величина скорости турбулентной диссипации энергии в единице массы, масштаб пространственных пульсаций, температура и компоненты тензора внутренних напряжений. Описываемый хаос является детерминированным, так как исходная математическая модель (6) не содержит источников шума.

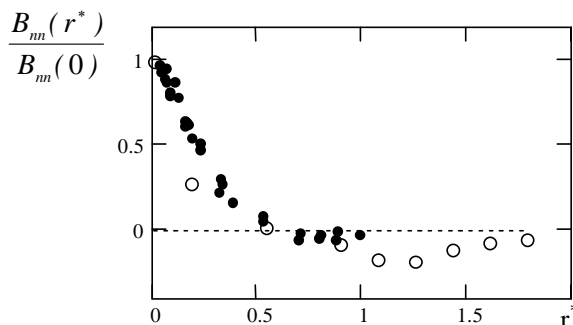


Рис. 2

В диссертации сопоставляются теоретические расчеты для корреляционной функции поперечных пульсаций скорости $B_m(r^*)$ (рис. 2, белые точки) с экспериментальными данными Г. Тейлора (рис. 2, черные точки) и указывается на их удовлетворительное соответствие при $r^* \leq 1$.

Зависимость диагональных и недиагональных пульсационных компонент тензора внутренних напряжений от пульсаций скорости для развитой турбулентности близка к квадратичной. В небольшой окрестности приведенного масштаба пульсаций скорости в инерционном интервале $\eta_0^\gamma = |\eta_+| = |\eta_-|$ (при $\eta^\gamma > \eta_0^\gamma$) пульсации тензора положительны, что указывает на преимущественные процессы растяжения микроскопических объемов жидкости, участвующих в турбулентном течении. Сами же пульсации компонент тензора содержат ламинарные и турбулентные фазы с ярко выраженными проявлениями жесткой турбулентности. При численных расчетах установлено, что пульсационные компоненты тензора внутренних напряжений релаксируют в полном согласии с уравнением Максвелла (1).

На рис. 3а представлена скорость турбулентной диссипации энергии $E_T^\gamma = E_T^\gamma(\eta^\gamma)$ в инерционном интервале движений в зависимости от пульсаций скорости η^γ , а на рис. 3б – ее изменение во времени.

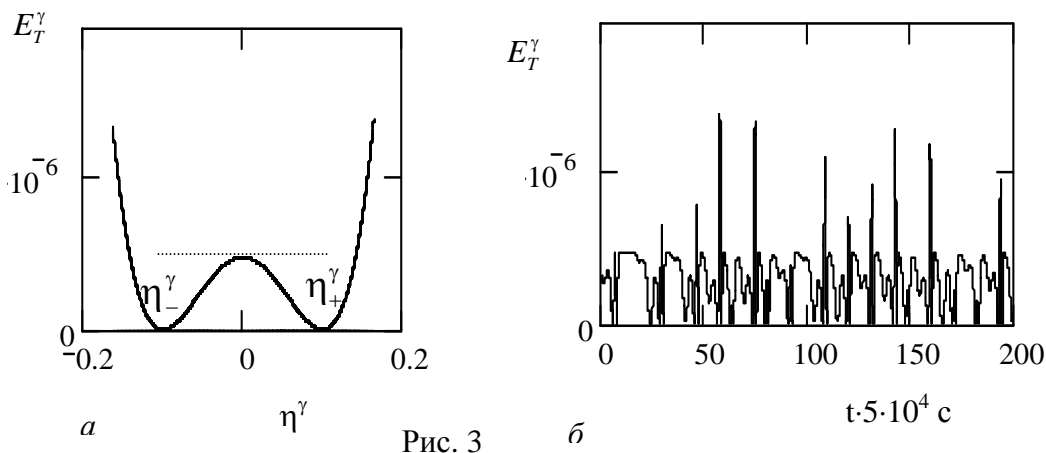


Рис. 3

Расчет пульсаций температуры производился по выражению (8) по известным значениям $\eta(t)$, $\xi(t)$ и $\bar{\phi}^* = \bar{E}_T^*$ – средняя скорость диссипации энергии за счет теплопроводности. Величиной рассеяния энергии за счет акустических колебаний

пренебрегали. При численных расчетах величина $\overline{E_T^*}$ находилась по (9) путем осреднения по времени. На рис. 4а представлена динамическая огибающая пульсаций температуры в зависимости от пульсаций пространственного масштаба $\xi^\gamma(t)$ ($\xi^\gamma(t) = \xi^*(t)/Re^*$). Характерной особенностью такого рассмотрения является появление четко выраженного инерционного и диссипативного интервалов для указанных пульсирующих характеристик (штриховые линии на рис. 4 соответствуют масштабам инерционного интервала). Резкое увеличение пульсаций температуры в инерционном интервале связаны с логарифмическим увеличением внутреннего масштаба пространственных пульсаций ξ^* (Рис. 4б).

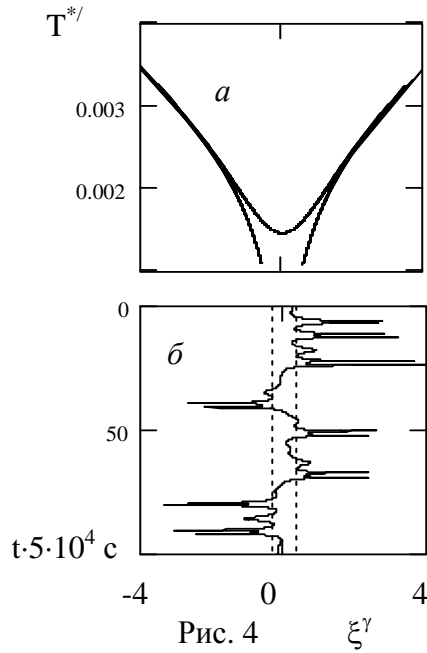


Рис. 4

По известным из расчета (6) пульсациям скорости $\eta^\gamma(t)$ вычислялись приведенные пульсации плотности $\rho^\gamma = \rho^*/(\eta^\gamma)$ (см. систему уравнений (6)), динамика которых представлена на рис. 5. Явлению жесткой турбулентности соответствуют пульсационные пики, значительно превышающие хаотические всплески в соседних по времени интервалах. Следует отметить наличие преимущественных пульсаций плотности в сторону ее положительных значений $\rho^\gamma > 0$. Это, вероятно, свидетельствует об адиабатическом сжатии, которое наблюдается в развитой турбулентности.

Согласно излагаемой физической модели произведение $\xi^\gamma \cdot E_T^\gamma$ – один из основных показателей развитой турбулентности в теории Колмогорова–Обухова [14, 15] – является сложной трансцендентной функцией приведенной скорости пульсаций η^γ :

$$\xi^\gamma E_T^\gamma = \frac{Re^{*3}}{2J \sqrt{|a_0^*|} Re_c} \ln \frac{\sqrt{|a^*|} + Re^* \eta^\gamma}{\sqrt{|a^*|} - Re^* \eta^\gamma} (\eta^{\gamma 2} + a_0^*)^2, \quad a_0^* = a^* / Re^{*2}. \quad (10)$$

В этом выражении $E_T^\gamma = E_T^*(\eta^\gamma)$. Зависимость (10) имеет четко выраженный характер, в том числе и при нестационарных процессах (рис. 6а), что воспроизводится и фиксируется при численных расчетах в динамическом режиме.

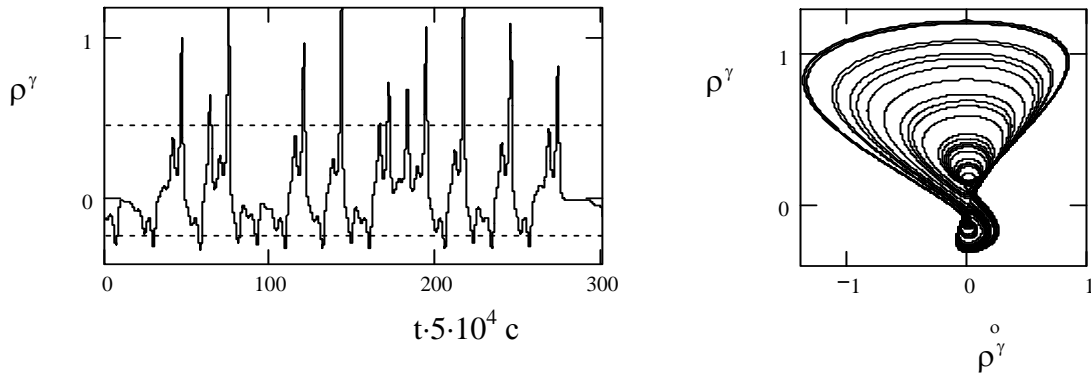


Рис. 5. Хаотическая динамика пульсаций плотности развитой изотропной турбулентности. Рядом приведен фазовый портрет пульсаций этой величины.

Описываемая функция (10) является нечетной (рис. 6а, непрерывная кривая) и для нее были подобраны интерполяционные формулы

$$\xi^\gamma \cdot E_T^\gamma = A_0 \eta^\gamma + C_0 \eta^{\gamma^2} + D_0 \eta^{\gamma^3} \quad (\text{при } \eta^\gamma > 0 \text{ и } \eta^\gamma < 0), \quad (11)$$

которые при $A_0 = \sqrt{3}/Re_c$, $C_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $D_0 = 6.536 \cdot 10^{-4}$ хорошо аппроксимируют (10) и дают кривую, изображенную на рис. 6а пунктирной линией. В соответствии с интерполяционными выражениями произведение $\xi^\gamma E_T^\gamma$ в сильно диссипативном интервале ($\eta^\gamma \ll \eta_0^\gamma$, $\xi^\gamma \ll \xi_0^\gamma$, где ξ_0^γ и η_0^γ – приведенные пространственные и скоростные масштабы пульсаций в диссипативном интервале) оценивалось по формуле: $\xi^\gamma \cdot E_T^\gamma \sim (\sqrt{3}/Re_c) \eta^\gamma$.

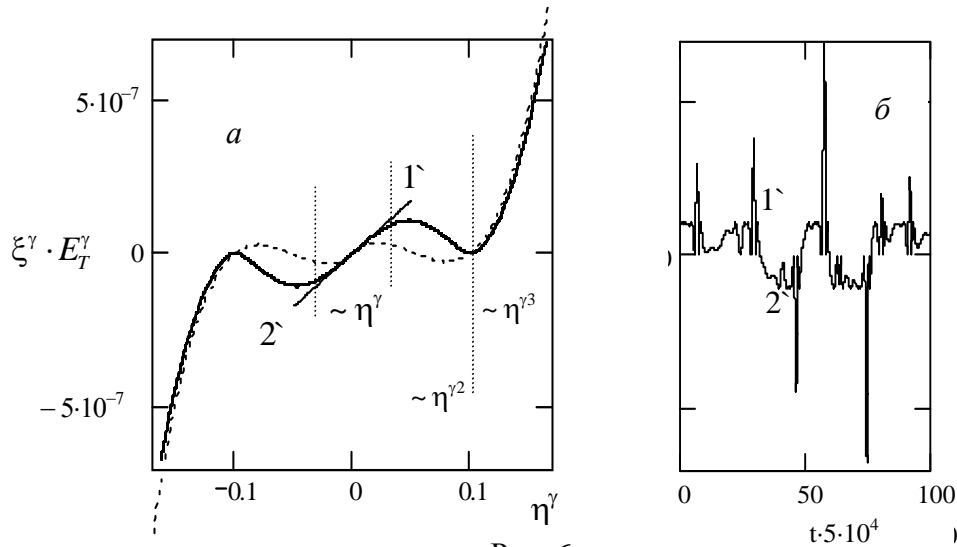


Рис. 6

На рисунке 6а нанесена линейная асимптотика (1'–2'), соответствующая области сильно диссипативного интервала. При этом теория Колмогорова–Обухова для этого интервала также дает линейную зависимость: $\eta^\gamma \sim \alpha \xi^\gamma$ ($\alpha = \eta_0^\gamma / \xi_0^\gamma$). В инерционном интервале ($\eta^\gamma \geq \eta_0^\gamma$, $\xi^\gamma \geq \xi_0^\gamma$, где ξ_0^γ и η_0^γ – пространственные и скоростные масштабы пульсаций в инерционном интервале) аппроксимация выражения (10) интерполяционными формулами (11) приводит к соотношению $\xi^\gamma \cdot E_T^\gamma \sim (\sqrt{3} Re^{*2} / Re_c) \eta^{\gamma^3}$, что полностью соответствует закону Колмогорова–Обухова «одной трети». В переходной области $\xi_0^\gamma \leq \xi^\gamma \leq \xi_0^\gamma$, $\eta_0^\gamma \leq \eta^\gamma \leq \eta_0^\gamma$ при $\omega\tau_r \sim 0.18$ (остальные параметры остаются неизменными) наблюдается более удовлетворительное соответствие интерполяционной формулы (11) выражению (10), чем при $\omega\tau_r \sim 1$. В результате можно констатировать, что выражения (10) не только правильно описывает пульсации в инерционном интервале и интервале сильной диссипации, но и позволяют находить численные коэффициенты в указанных зависимостях.

По решениям НДУ (6) строится нормированный спектр мощности пульсаций скорости (рис. 7а) в зависимости от приведенного волнового числа $k^* = k/k_1$ (k_1 – волновое число Колмогорова), который сравнивался с экспериментальным обобщенным спектром Д. Чепмена [16] (рис. 7б). В области $k > k_1$, которая находится за пределами чувствительности газоразрядных анемометров с тлеющим разрядом, теоретический спектр предсказывает изменение спектральной плотности по закону $\sim 1/k^{*2}$. При меньших волновых числах наблюдается полное соответствие теории и эксперимента, как по волновым числам, так и по величинам спектральной плотности. Таким образом, теоретическая модель объясняет не только закон “5/3” в инерционном интервале, но и резкий спад спектра в области больших

волновых чисел (в диссипативном интервале) по закону $\sim 1/k^{*-7}$, который также соответствует эксперименту.

Показывается хорошее соответствие построенного по выражению (8) теоретического спектра пульсаций температуры и экспериментального температурного спектра С. Понда. Оба эти спектра подчиняются закону «5/3».

Полный анализ хаотических состояний подразумевает построение бифуркационных диаграмм – зависимостей решений η' от управляющих параметров уравнения (6). В диссертации приводятся примеры построенных диаграмм, отражающие переход к развитой изотропной турбулентности. Исследование устойчивости течения в зависимости от двух управляющих параметров (Re^* , ω^*) приводит в теории турбулентного течения к нейтральным кривым. В действительности для развитой турбулентности число управляющих параметров в исследуемой задаче больше двух и каждое из них влияет не только на переход к турбулентности и структуру вихрей, но и на свойства пульсаций. Поэтому нами исследовалось нарушение устойчивости (переход к хаосу) по принятому в нелинейной динамике методу бифуркационных диаграмм в зависимости от следующих параметров: β , τ , Re^* , ω^* , τ_r , ∇P_0^* .

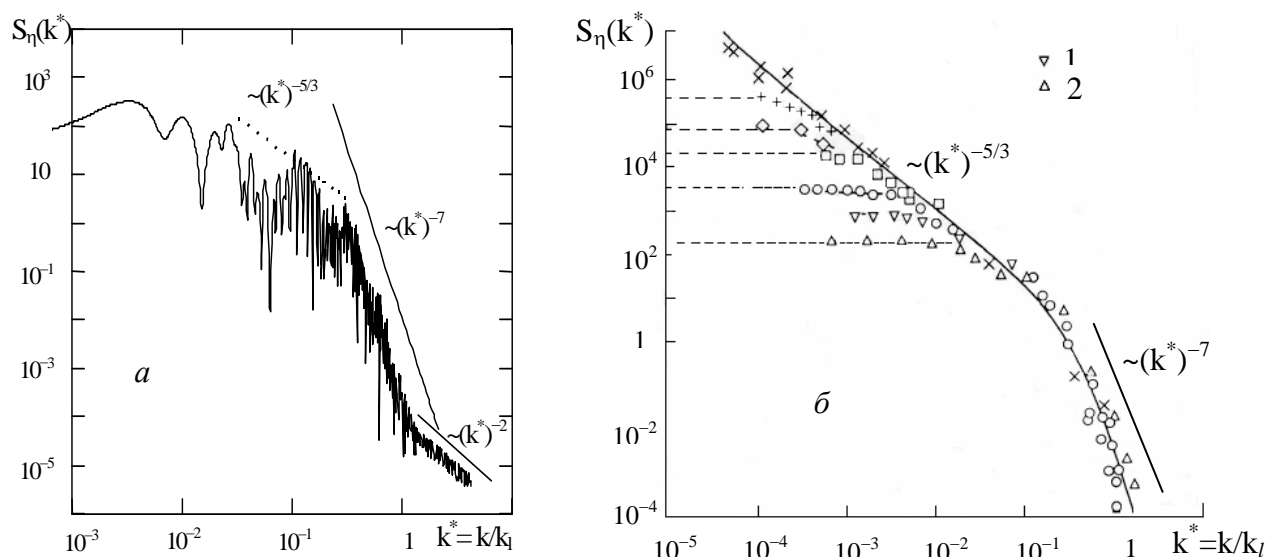


Рис. 7. Спектр турбулентных пульсаций скорости: а) нормированный теоретический спектр для развитой изотропной турбулентности, расчет по (6); б) экспериментальный обобщенный спектр Д. Чепмена [16] (1 – турбулентность за сеткой, 2 – пограничный слой).

Анализ спектров пульсаций скорости показал, что при изменении числа Рейнольдса в диапазоне от $Re^*=1$ до $Re^*=6.5$ в рассматриваемом течении происходят последовательные бифуркации удвоения периода, посредством которых осуществляется переход от ламинарного (периодического) движения к развитой изотропной турбулентности. При $Re^* \approx 1$ происходит бифуркация Хопфа из устойчивого фокуса в предельный цикл с частотой $\omega^*=2.26$. Вторая частота $\omega_0^*=1.109$ соответствует частоте воздействия малых возмущений, связанных с распадом и образованием турбулентных вихрей. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса в системе происходят последовательные бифуркации удвоения периода, приводящие к периодическому движению с частотами $\omega^*/2$, $\omega^*/4$, $\omega^*/8$ и т.д. (Рис. 8). Эта последовательность сходится при $Re^* \approx 7$, возникает странный аттрактор и спектр делается сплошным. Промежуточные пики меньших амплитуд соответствуют частотам $(3/2)\omega^*$, $(3/4)\omega^*$ и т.д., которые также наблюдались на спектрах при бифуркациях удвоения периода в эксперименте Рэлея–Бенара. Таким образом, в диссертации путем анализа спектров пульсаций скорости в зависимости от числа Рейнольдса делается вывод о том, что переход к

развитой турбулентности в соответствии с излагаемой моделью происходит по сценарию Фейгенбаума посредством удвоения периода.

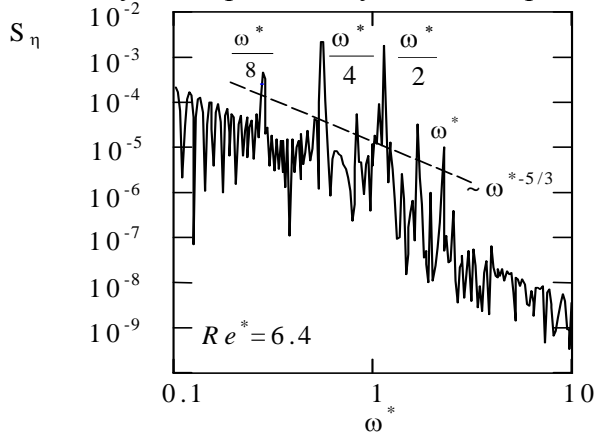


Рис. 8. Спектр пульсаций скорости при $Re_c=5 \cdot 10^5$, $\tau_r=0.865$, $\tau=1.52$, $\omega^*=1.109901$, $\nabla P_0^*=0.61$, $\beta=1.04060401 \cdot 10^{-4}$, $\eta(0)=0.03$, $\eta^o(0)=0.002$, $\omega^* \tau_r=0.96$, $A=C=G=3$, $E=6$, $H=9$, $Re^*=6.4$. Наклон пунктирной линии соответствует колмогоровскому спектру $\omega^{*-5/3}$.

В диссертации на основе показателей Ляпунова устанавливается свойство перемешивания для рассматриваемой системы, что проявляется в экспоненциальном расхождении двух изначально близких фазовых траекторий за малое время t_r на некоторое характерное расстояние. Положим, что $\delta \xi^{\gamma 0}$ – есть мера начального «расстояния» между двумя точками фазовых траекторий ξ_1^{γ} и ξ_2^{γ} по пространственному масштабу (7). Тогда «расстояние» между траекториями, выходящими из этих точек ($\delta \xi^{\gamma}(t) = |\xi_1^{\gamma}(t) - \xi_2^{\gamma}(t)|$), при $t < t_r$ будет экспоненциально расти: $\delta \xi^{\gamma} = \delta \xi^{\gamma 0} \exp(\lambda t)$ (рис.9). Здесь λ – показатель Ляпунова.

Из этого же рисунка видно, что при $t > t_r$ величина $\delta \xi^{\gamma}$ выходит на плато и начинает колебаться вблизи некоторого значения λ^{γ} : $\lambda^{\gamma} = \lambda / \xi_c = 0,471 \pm 0,021$. Полученное численное значение воспроизводилось при различных начальных условиях и малой вариации управляющих параметров. Величина $\lambda = 0,471 \xi_c$ названа в диссертации аналогом длины пути перемешивания по Прандтлю для развитой изотропной турбулентности, поскольку выражение для ее расчета напоминает выражение Прандтля для длины пути перемешивания:

$\lambda = \chi u$, где u – расстояние от обтекаемой поверхности, а $\chi = 0,4$. Тогда величину $\lambda^{\gamma} = \delta \xi^{\gamma}$ условились называть приведенным аналогом длины пути перемешивания для развитой турбулентности. Физический смысл аналога длины пути перемешивания состоит в том, что это среднее максимальное расстояние, на которое расходятся фазовые траектории по пульсациям пространственного масштаба с течением времени. Аналогичная картина наблюдается при расхождении фазовых траекторий по скорости пульсаций ($\eta^{\gamma} = \partial \xi^{\gamma} / \partial t$). Показатель Ляпунова в таких системах определяется по наклону касательной к графикам $\delta \eta^{\gamma}(t)$ и $\delta \xi^{\gamma}(t)$ (рис. 9). Знак и величина этого

показателя позволяют судить о степени хаотичности системы. Так, при положительных, но конечных показателях Ляпунова ($\lambda > 0$, $\lambda \neq \infty$) система будет хаотической (турбулентный режим течения). При $\lambda \leq 0$ система будет иметь регулярный, периодический характер (ламинарный режим течения).

Во второй главе диссертации в анализ развитой турбулентности вводится энтропия Колмогорова K_0 , которая пропорциональна скорости потери информации о состоянии системы с течением времени. Для турбулентных пульсаций такая постановка

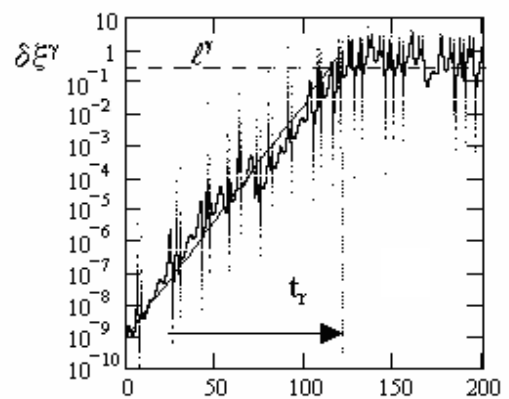


Рис. 9 $t \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ c}$

является очень важной, так как благодаря этому может быть оценено время жизни фазовой траектории t_r (время перемешивания): $t_r = (1/K_0) \ln(1/\delta \xi^{\gamma_0}) = (1/0.17) \ln(1/10^{-9}) \approx 121.3$. За это время система полностью забывает начальные условия и при $t > t_r$ ее уже нельзя вернуть в исходное состояние.

Энтропия Колмогорова равна сумме положительных показателей Ляпунова ($K_0 = \lambda > 0$ – для одномерной задачи) и как показатель Ляпунова, может служить своеобразным индикатором периодического ($K_0 = 0$), хаотического ($K_0 > 0$, $K_0 \neq \infty$) или случайного ($K_0 \rightarrow \infty$) поведения пульсационных характеристик.

Следуя Тейлору, было получено выражение для коэффициента турбулентной диффузии жидких частиц в развитом турбулентном потоке: $D^T = \overline{\eta^2} N_L$ или $D^T = \sqrt{\overline{\eta^2}} \Lambda_L$. Здесь N_L – наиболее длительный интервал времени, в течение которого частица в среднем испытывает перемещение в данном направлении; Λ_L – приведенный масштаб вихревой диффузии. Численные расчеты показали, что для развитой изотропной турбулентности в инерционном интервале $\Lambda_L \approx 1.382 \cdot 10^3$ см. при внешнем масштабе турбулентности $\xi_c \approx 3.68 \cdot 10^3$ см. Несложно убедиться в том, что для инерционного интервала справедливо приближенное равенство $\overline{\eta^2} \approx |\eta_0|^2 = |a^*|^2$. Величина N_L по своему физическому смыслу соответствует величине t_r – времени забывания начальных условий. Тогда $D^T \approx 1.6 \cdot 10^2$ см²/с, что по порядку величины соответствует экспериментальным данным: $D^T_{эксп} = 300 \div 500$ см²/с.

В диссертации показывается, что элементарный фазовый объем сжимается экспоненциально во времени, что свидетельствует о диссипативном характере рассматриваемой системы (6).

В третьей главе путем интегрирования НДУ (6) на конечном временном промежутке производится переход к дискретной модели – одномерному отображению для пульсаций скорости. При этом полагалось: 1) процессы распада и образования турбулентных вихрей происходят с единым периодом Y , равным периоду мелкомасштабных пульсаций t' и подобны «ударам» по системе; 2) время релаксации внутренних напряжений в жидкости τ_r много меньше времени ретардации τ ($\tau_r \ll \tau$); 3) влияние возмущений в течении мало ($\nabla P_0^* = 0$).

В результате в диссертации было получено одномерное отображение для пульсаций скорости в виде:

$$\eta_{k+1} = \eta_k - Y \frac{B \cdot Re^{*2} (\eta_k^3 + a_0^* \eta_k + b_0^*)}{1 - B \cdot \tau Re^{*2} (3\eta_k^2 + a_0^*)}, \quad a_0^* = -\beta^{1/2} \left(1 - \frac{1}{Re^{*2}} \right), \quad B = \sqrt{\frac{A^2}{2H - (2/3)C^2}}. \quad (12)$$

Здесь переменные $\eta_k \equiv \eta_k / V_x^*$ – приведенные пульсации скорости в момент времени $t = kY$ (k – целое число). Поскольку $Y \equiv Y/t'$, то в соответствии с условиями перехода $Y \equiv 1$. Отмечается, что при описании развитой изотропной турбулентности параметр $b_0^* = 0$ и огибающая для E_T^γ является симметричной функцией (рис. 3а). Разрушение изотропной турбулентности происходит, когда $b_0^* \neq 0$.

Приводятся численные расчеты отображения (12), которые показывают, что полученные в результате хаотические решения для пульсаций скорости качественно повторяют все основные особенности хаотической динамики этой величины для НДУ (6). Вследствие относительной простоты отображения (12) для него были проведены дополнительные исследования и получены следующие результаты.

1. Методом временных задержек в двумерном фазовом пространстве была посчитана корреляционная размерность аттрактора \mathfrak{D} . Численные расчеты показали, что для $N=500$ точек и времени задержки $t=10$ корреляционная размерность равна $\mathfrak{D}=1.57$. Она определяется

по наклону касательной к графику характеристики пространственной корреляции $C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N^2) \sum_{i,j=1}^N H(r - |\vec{\eta}_i - \vec{\eta}_j|)$, где H – функция Хевисайда, N – количество точек итерации, $\vec{\eta}_i$ и $\vec{\eta}_j$ – значение радиус-векторов двух различных точек в фазовом пространстве (η_{k+t}, η_k) , где t – время задержки пульсаций. Корреляционная размерность при малых t не зависит от времени задержки. Ее величина колеблется вблизи значения $D \approx 1.53$. Однако, при больших t наблюдается слабый рост корреляционной размерности. Например, при $t=100$, величина $D=1.601$. Такой рост закономерен и связан с тем, что при больших t точки на двумерной плоскости (η_{k+t}, η_k) все меньше располагаются вдоль прямой линии (при $t=0$) и все более равномерно распределяются по фазовой плоскости. Чем больше время задержки, тем точнее считается величина D . Таким образом, можно говорить о том, что для данного хаотического процесса корреляционная размерность $D \approx 1.6$. Последнее указывает на *антиперсистентный* характер пульсаций скорости: увеличение амплитуды пульсаций в прошлом сменяется уменьшением в будущем и наоборот.

2. В диссертации была построена и исследована бифуркационная диаграмма в зависимости от приведенного числа Рейнольдса $Re^* = Re/Re_c$ и соответствующая кривая показателя Ляпунова $\lambda(Re^*)$.

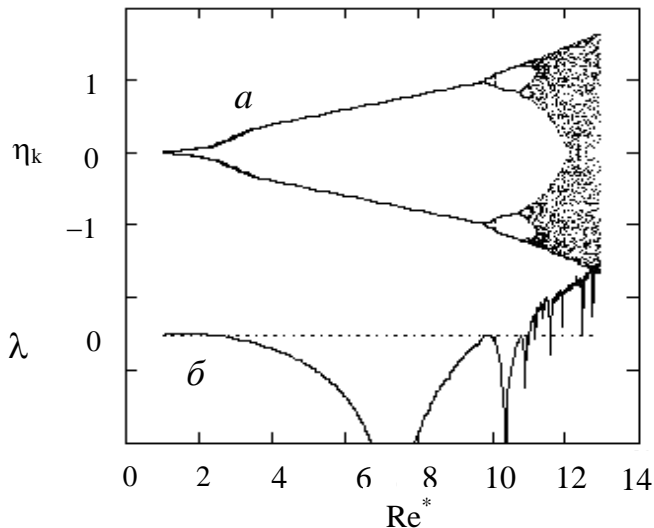


Рис. 10. а) Бифуркационная диаграмма в зависимости от приведенного числа Рейнольдса, рассчитанная по отображению (12) при $\eta_0=0.02$, $\beta=1.04060401 \cdot 10^{-4}$, $\tau=0.09$, $Re_c=5 \cdot 10^5$; б) соответствующий показатель Ляпунова.

Анализ бифуркационной диаграммы (рис. 10а) позволяет определить критические значения чисел Рейнольдса, при которых происходит перестройка режимов течения. Эти перестройки проявляются в виде ветвлений на бифуркационной диаграмме. Первое ветвление при

$Re^*=1$ связано с потерей устойчивости ламинарного режима течения ($\eta_k=0$) и соответствует фазовому переходу второго рода. В результате в турбулентном потоке возникают однонаправленные пульсации скорости конечной амплитуды η_+ или η_- (в зависимости от знака начальных условий). В диссертации приводится физическая интерпретация всех остальных точек ветвлений вплоть до точки перехода к развитой турбулентности ($Re^* \approx 11$). При $Re^* > 11$ имеются узкие области, где показатель Ляпунова отрицателен, что указывает на регулярный процесс (рис. 10). Такие окна в теории детерминированного хаоса называются «окнами детерминированного поведения».

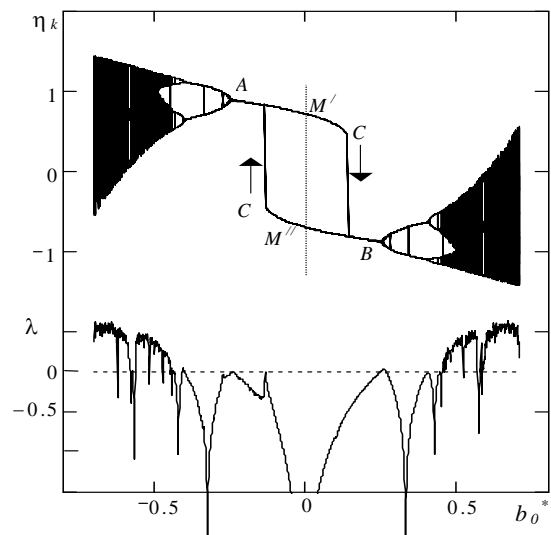


Рис. 11

3. При итерации отображения (12) были построены также бифуркационные диаграммы и показатели Ляпунова в зависимости от параметра b_0^* (рис. 11, $a_0^* < 0$). Из этого рисунка видно, что при $b_0^* \neq 0$ в турбулентном течении имеются выделенные направления пульсаций: $\eta_k > 0$ – по ходу течения (при $b_0^* < 0$) и $\eta_k < 0$ – пульсации против хода течения (при $b_0^* > 0$), при этом $\overline{\eta_k} \neq 0$. Даже при $|b_0^*| > 0.6$, когда в потоке возникают пульсации в обоих направлениях, они не являются одномасштабными. Таким образом, можно говорить, что ненулевые значения параметра b_0^* соответствуют неизотропной турбулентности.

4. На основе численных расчетов установлено, что при изменении управляющего параметра b_0^* возможен заход в метастабильную область для каждой из стационарных значений пульсаций η_+ (ветвь M'/C) и η_- (ветвь M''/C) (рис.11). Вероятно, можно говорить о неустойчивости ветвей, каждая из которых ограничена с одной стороны точкой срыва C в метастабильной области, а с другой стороны – бифуркационной точкой удвоения периода (A или B). Заход в метастабильную область тем значительнее, чем большие значения по абсолютной величине имеют начальные условия η_k ($k=0$). Глубокий заход в область метастабильных состояний заканчивается взрывной переориентацией пульсаций скорости, что хорошо фиксируется при решении динамической задачи численными методами. Отметим, что получение таких диаграмм в рамках уравнения (6) затруднено.

В четвертой главе рассматривается применение полученного одномерного уравнения (6) и одномерного отображения (12), разработанных диссертантом, к описанию ряда других физических задач:

- описание динамики движения нелинейного ротатора с кусочно–постоянным коэффициентом затухания, возбуждаемого периодическими ударами;
- описание хаотической динамики заземленной с обоих концов вязкоупругой цилиндрической балки с последствием, обтекаемой развитым турбулентным потоком жидкости или газа;
- описание хаотической динамики плотности тонкого поверхностного слоя жидкости единичного объема на границе раздела жидкость–пар;
- нахождение коэффициентов моментов сопротивления и моментов силы сопротивления свободно вращающегося диска и диска в кожухе при турбулентном режиме течения.

Показывается, что полученное в первой главе уравнение (6) может быть использовано для решения последней из перечисленных задач, если переменная η будет равна разности между мгновенной эффективной угловой скоростью вращения диска ω_e^* и некоторой средней характерной угловой скоростью ω_{ek}^* , определяемой уравнением: $3\omega_{ek}^* - 2\omega_{ek}^{*3} = \omega_{ek}^{*4/3} / Re^{*1/2}$. В правой части уравнения (6) содержится функция источника в виде кубического полинома, тогда в стационарной задаче (левая часть уравнения (6) равна нулю) мы получаем кубическое уравнение, которое имеет три стационарных решения (ω_{ek} , $\omega_{e\pm}^* = \omega_{ek}^* \pm (-a^*)^{1/2}$), соответствующие возможным значениям угловой скорости вращения диска при турбулентном режиме течения:

$$\eta^3 + a^* \eta + b^* = 0, \quad a^* = -3(\omega_{ek}^{*2} - 1), \quad b^* = -M_x^* + 3\omega_{ek}^* - 2\omega_{ek}^{*3}, \quad M_x^* = M_x / M_c.$$

Здесь M_x – момент силы, под действием которой вращается диск. Далее, пользуясь соотношениями (13), находятся безразмерные количественные аналитические выражения для коэффициентов моментов сопротивления C_{Mi}^* ($i="k", "+", "-"$), моментов силы сопротивления M_i^* , толщины пограничного слоя δ_i^* соответствующие трем возможным значениям угловой скорости свободно вращающегося диска при турбулентном режиме течения:

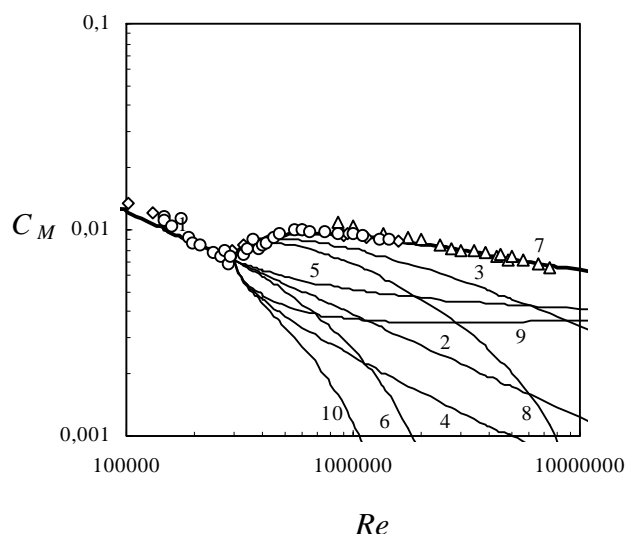
$$C_{Mi}^* \equiv \left(\alpha / Re^{*1/2} \right) + \beta, \quad \alpha = \left(\omega_{ek}^* / \omega_{ei}^* \right)^{4/3}, \quad \beta = 2 \sqrt{\left(\omega_{ek}^{*2} - 1 \right)^3} / \omega_{ek}^{*4/3}, \quad \omega_e^* = \omega^{*3/2}, \quad (13)$$

$$v_i^* \{\omega^*\} = (\alpha + \beta \omega^{*1/2}), \quad \delta_i^* = v_i^* / Re^{*1/2}, \quad (i = "k", "+", "-"), \quad M_i^* = \omega_{ei}^{*4/3} C_{Mi}^*, \quad Re^* = Re / Re_c,$$

Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными (рис. 12) показало, что в турбулентном течении вблизи свободно вращающегося диска реализуется режим, соответствующий максимальному коэффициенту сопротивления ($\omega_{e-}^* = \omega_{ek}^* - (-a^*)^{1/2}$), который находится на верхней ветви сепаратрисы одного из стационарных решений (рис. 12, кривая 7). В диссертации приводятся также выражения для коэффициента момента сопротивления и момента силы сопротивления для диска в кожухе. Рассмотрены случаи, когда ширина щели между кожухом и диском больше и меньше толщины пограничного слоя.

Таким образом, сопоставление теоретических результатов с экспериментальными для свободно вращающегося диска и диска в кожухе в широком диапазоне чисел Рейнольдса указывает на их удовлетворительное соответствие.

Рис. 12. Бифуркационная диаграмма коэффициентов моментов сопротивления свободно вращающегося диска (расчет по (13)): 1 – устойчивый ламинарный режим течения, рассчитываемый по формуле Кохрэна; 2, 3, 4 – неустойчивые бифуркационные решения и линии их сепаратрисы (5–10); 7 – устойчивый турбулентный режим течения. Экспериментальные данные соответствуют: о – NACA Report № 793; число Маха: ∇ – от 0,48 до 1,69; \diamond – от 0,24 до 0,62.



ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Обоснован новый подход к рассмотрению развитых турбулентных потоков с позиций вязкоупругих сред и получен критерий применимости такого подхода. Предложена система уравнений движения вязкоупругой среды на основе уравнений Навье–Стокса и уравнения Максвелла для тензора внутренних напряжений, которая позволяет описывать движения реологических сред с существенными вязкоупругими свойствами.

2. Найдено в рамках полученной системы уравнений движения вязкоупругой среды одномерное нелинейное дифференциальное уравнение (НДУ) второго порядка для изотропных турбулентных пульсаций скорости в инерционном интервале движений турбулентной среды с запаздыванием. Для развитой турбулентности в инерционном интервале предложены также выражения для изотропных турбулентных пульсаций температуры, пространственного масштаба, плотности, скорости турбулентной диссипации энергии и компонент тензора внутренних напряжений.

3. Осуществлен переход от НДУ интегрированием к одномерному отображению в целях наиболее полного исследования динамических характеристик турбулентного движения в рамках нелинейной динамики.

4. Установлено, что нормированные теоретические спектры мощности турбулентных пульсаций скорости и температуры, построенные по непрерывной модели, хорошо соответствуют экспериментальным спектрам, как по волновым числам, так и по спектральной плотности. Показано, что в случае однонаправленного характера пульсаций

скорости энергетический спектр, построенный по итерациям одномерного отображения, является квадратичным, а при переходе к двунаправленным пульсациям спектр становится близким к колмогоровскому.

5. Получено соответствие с законами развитой турбулентности в теории Колмогорова–Обухова для инерционного интервала и интервала сильной диссипации. Вычислены константы в этих законах.

6. Установлено, что переход к развитой турбулентности по описываемой модели происходит по сценарию Фейгенбаума посредством удвоения периода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнольдс О. Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия. В сб. «Проблемы турбулентности». Москва, 1936 г., с. 185–227.
2. Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Ч.1, 2, Пермь, 1999 г.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967 г.
4. Чусов М. А. Релаксационные процессы в развитом турбулентном потоке. В кн. «Турбулентные течения». М.: Наука, 1974 г., с.100–110.
5. Быстрой Г. П., Макаров Л. В., Шилин Г. Ф. Неравновесная термодинамика процессов горного производства. М.: Недра, 1991г.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965 г.
7. Алексеев Б. В. Физические основы обобщенной больцмановской теории газов// УФН, 2000 г., т.170, №6, с. 649–679.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.:Наука, 1969 г.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1, 2. М.:Мир, 1984 г.
10. Павлов С. В. Методы теории катастроф в исследовании фазовых переходов. М.: МГУ, 1993 г.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986 г.
12. Гершуни Г. З. Гидродинамическая неустойчивость. Изотермические течения// СОЖ, 1997 г., № 2, с. 99–106.
13. Колмановский В. Б. Уравнения с последействием и математическое моделирование// СОЖ, 1996 г., № 4, с. 122–127.
14. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса// ДАН СССР, 1941 г., т. 30, № 4, с. 299–303.
15. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока// ДАН СССР, 1941 г., т. 32, №1, с. 22–24.
16. Белоцерковский О. М., Опарин А. М. Численный эксперимент в турбулентности, от порядка к хаосу. М.: Наука, 2000 г.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Быстрой Г. П., Студенок С. И., Нагорняк Е. М. Моменты сопротивления вращающегося диска в безграничном объеме жидкости при турбулентном режиме течения. Тезисы докладов симпозиума «Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках». Воронеж, ВГУ, 2000 г., с. 43.
2. Студенок С. И., Быстрой Г. П. Коэффициенты сопротивления свободно вращающегося диска и диска в кожухе при турбулентном режиме течения. Труды XXX Уральского семинара «Неоднородные конструкции». Челябинский научный центр УрО РАН. Миасский научно-учебный центр. Екатеринбург, 2000 г., с. 79-84.
3. Студенок С. И., Быстрой Г. П. Моделирование пульсаций скорости и их пространственного масштаба при изотропной турбулентности. Тезисы ВНКФС-7. Екатеринбург–Санкт-Петербург, 2001г., с. 330–333.
4. Быстрой Г. П., Студенок С. И. Математическое моделирование развитой изотропной турбулентности. Тезисы Первой Всероссийской научной internet-конференции

«Компьютерное моделирование в естественных и технических науках» Вып.1. Тамбов, 2001 г., с. 29–35.

5. *Студенок С. И.* Численное решение модельного уравнения Навье–Стокса для изотропной турбулентности. Материалы XXXIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно–технический прогресс». Новосибирск. 2001 г., с.159–160.
6. *Студенок С. И. Быстрый Г. П.* Двумерные отображения для нелинейных динамических систем с переменным коэффициентом затухания, возбуждаемого периодическими ударами. Третья Всероссийская научная Internet-конференция «Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках». Вып. 12. Тамбов, 2001 г., с. 3–6.
7. *Быстрый Г. П., Студенок С. И. Иванова С. И.* Показатели Ляпунова и энтропия Колмогорова в анализе неравновесных фазовых переходов. Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели». ЧГУ, 2002 г., с. 18.
8. *Быстрый Г. П., Студенок С. И.* Показатели Ляпунова и энтропия Колмогорова в анализе изотропного турбулентного течения. Труды Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара, 2002 г., с. 35–40.
9. *Быстрый Г. П., Студенок С. И.* Двумерные отображения для нелинейного ротатора с кусочно-постоянным коэффициентом затухания, возбуждаемого периодическими ударами. Изв-я ВУЗ: ПНД, т.10., N 6, 2002 г., с. 24–34.
10. *Быстрый Г. П., Студенок С. И., Иванова С. И.* Детерминированная модель гомофазных и гетерофазных флуктуаций в системе «жидкость-пар». ТВТ, т. 40, N5, 2002 г., с. 779–785.
11. *Быстрый Г. П., Иванова С. И., Студенок С. И.* Детерминированный хаос при фазовых переходах в системе «жидкость-пар». Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах. Сб. тр. Межд. конф. Махачкала: Инст-т. физики Даг. Науч. центра РАН, 2002 г., с. 177–180.
12. *Быстрый Г. П., Иванова С. И., Студенок С. И.* Показатели Ляпунова и энтропия Колмогорова при фазовых превращениях в многокомпонентных системах. Тезисы докл. I Всеросс. конф. «Физико-химические процессы в конденсированном состоянии и на межфазных границах». Воронеж: РАН, 2002 г., с. 271–273.
13. *Быстрый Г. П., Студенок С. И., Иванова С. И.* Детерминированный хаос при фазовых переходах I рода в системе жидкость - пар. ТВТ, 2003 г., т. 41, №4, с. 579-586.
14. *Студенок С. И., Быстрый Г. П.* Возникновение хаотических режимов при срывном флаттере на примере вязкоупругой цилиндрической балки. Труды двенадцатой межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара, 2002 г., с. 170–173.
15. *Быстрый Г. П., Студенок С. И.* Бифуркационные диаграммы, показатели Ляпунова и энтропия Колмогорова в анализе изотропного турбулентного течения. Тезисы докладов 13-й Зимней школы по механике сплошных сред. Институт механики сплошных сред УрО РАН. Пермь, 2003 г., с. 66
16. *Быстрый Г. П., Студенок С. И.* Моделирование изотропных турбулентных пульсаций гидродинамических характеристик в вязкоупругой сжимаемой жидкости с запаздыванием. Материалы Международной школы–семинара «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». Изд-во МГУ, 2004 г., с. 76-79.

Исследование поддержано за счет средств ЕЗН НИИ ФПМ УрГУ и программы «Ведущие научные школы».